

Cylindre sous son poids propre

1.1 Résolution de problèmes d'élastostatique linéarisés : l'approche en contrainte

Dans cet exercice, nous étudions le comportement mécanique d'un cylindre soumis à son propre poids. - **Dimensions et orientations** : Le cylindre a une hauteur H selon la direction e_3 et un rayon R pour sa section droite circulaire. - **Surfaces principales** (voir figure 1.1 ci-dessous): - Γ_0 désigne la base inférieure du cylindre située dans le plan $x_3 = 0$. - Γ_1 désigne la base supérieure du cylindre située dans le plan $x_3 = H$. - Γ_l représente la surface latérale du cylindre. - **Point de référence** : Le point O est le centre de la base Γ_0 .

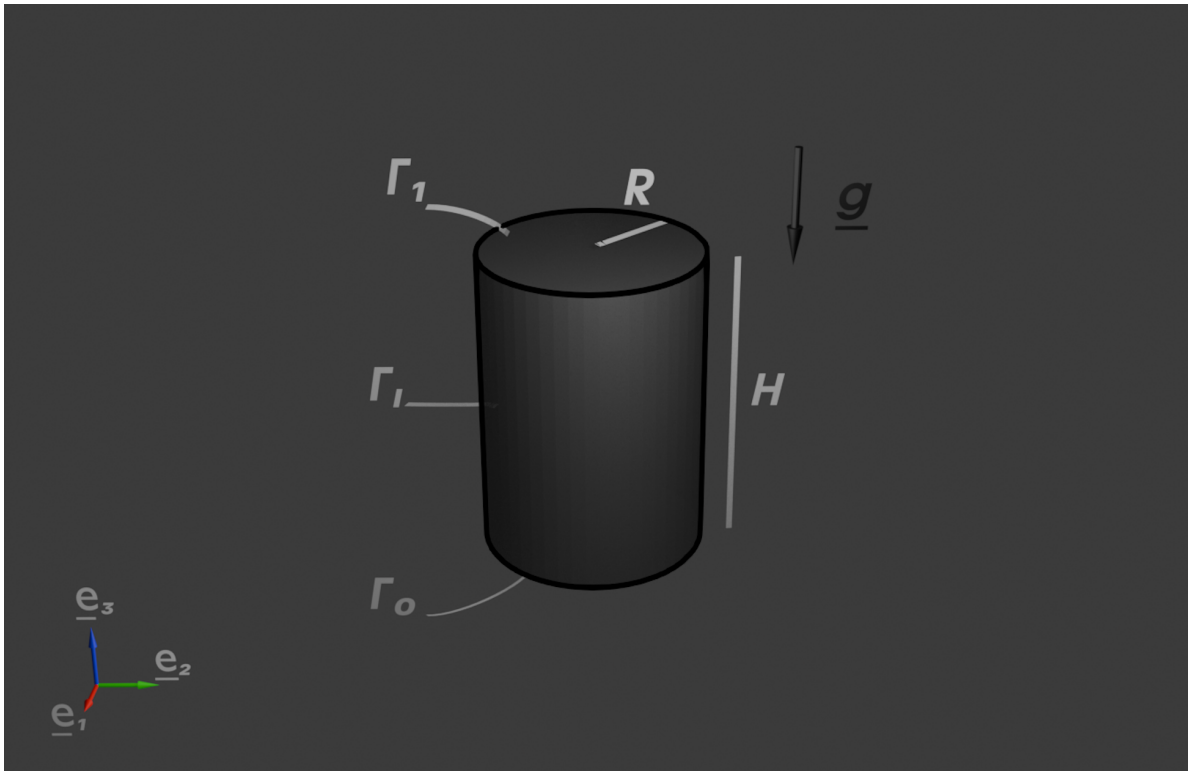


Figure 1.1 : Représentation du cylindre avec ses surfaces principales.

Le cylindre est élastique, homogène et isotrope, caractérisé par un module de Young E et un coefficient de Poisson ν . Il est supposé pesant, avec une masse volumique ρ . La base Γ_0 est encastrée, tandis que les surfaces Γ_1 (base supérieure) et Γ_l (surface latérale) sont supposées libres d'efforts.

-
- a. Traduire l'équilibre de la pièce et en déduire la résultante et le moment au point O du tenseur des efforts surfaciques exercés sur cette base.

Montrer que ce torseur est équivalent à une distribution d'efforts surfaciques uniforme de la forme $P\mathbf{e}_3$, où P est un scalaire constant que l'on exprimera en fonction des données du problème.

1.1.1 Établissement des équations d'équilibre

À partir des lois de l'équilibre statique, nous pouvons écrire les relations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{R} + \mathbf{R}^* = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_O + \mathbf{M}_O^* = \mathbf{0} \end{cases}$$

où :

- $\mathbf{R}^*$ désigne la résultante du poids du cylindre,
- $\mathbf{M}_O^*$ désigne le moment résultant du poids par rapport au point O .

À l'équilibre, la résultante du poids $\mathbf{R}^*$ est équilibrée par les **actions extérieures mécaniques surfaciques appliquées** sur la base Γ_0 . Ces actions s'expriment à travers le vecteur contrainte de Cauchy, défini par :

$$\mathbf{T}|_{\Gamma_0} = \sigma|_{\Gamma_0} \cdot \mathbf{n}, \quad \text{avec } \mathbf{n} = -\mathbf{e}_3.$$

1.1.2 Calcul de la résultante et du moment

Nous cherchons maintenant à déterminer la résultante $\mathbf{R}$ et le moment $\mathbf{M}_O$ des forces gravitaires agissant sur le cylindre.

Résultante des forces de pesanteur

La résultante des forces $\mathbf{R}$ représente la somme vectorielle de toutes les forces de pesanteur agissant sur le cylindre. Nous la calculons à partir de son expression intégrale volumique :

$$\mathbf{R} = \iiint_{\Omega} \rho g \mathbf{e}_3 d\Omega \quad (\text{car } \mathbf{R}^* = \iiint_{\Omega} -\rho g \mathbf{e}_3 d\Omega)$$

Passons en coordonnées cylindriques pour effectuer les intégrations. Le volume élémentaire s'écrit $d\Omega = r dr d\theta dz$, ce qui donne :

$$\mathbf{R} = \iiint_{\Omega} \rho g r d\theta dr dz \mathbf{e}_3$$

En séparant les intégrales, nous obtenons :

$$\mathbf{R} = \rho g \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dz \mathbf{e}_3$$

soit, après calcul :

$$\mathbf{R} = \pi \rho g H R^2 \mathbf{e}_3$$

Moment au point O

Le moment $\mathbf{M}_O$ représente l'effet de rotation des forces de pesanteur autour du point O . Il s'exprime comme suit :

$$\mathbf{M}_O = \iiint_{\Omega} (\mathbf{OM} \wedge \rho g \mathbf{e}_3) d\Omega \quad (\text{car } \mathbf{M}_O^* = \iiint_{\Omega} (\mathbf{OM} \wedge \rho g \mathbf{e}_3) d\Omega)$$

La position $\mathbf{OM}$ en coordonnées cylindriques est donnée par $\mathbf{OM} = r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_3$. En utilisant les propriétés des produits vectoriels $\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_\theta$ et $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$, nous obtenons :

$$\mathbf{M}_O = \rho g \int_0^H dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr (-r \mathbf{e}_\theta)$$

Or, $\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2$.

Les contributions intégrées sur $\theta \in [0, 2\pi]$ s'annulent par symétrie du problème, ce qui conduit à :

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$$

Distribution surfacique d'efforts sur Γ_0

La force surfacique uniforme sur la base Γ_0 s'écrit :

$$\mathbf{F}_s = P\mathbf{e}_3,$$

où P est une constante à déterminer. En intégrant cette densité surfacique sur Γ_0 (dont l'aire est $S = \pi R^2$), la résultante s'obtient par :

$$\iint_{\Gamma_0} \mathbf{F}_s ds = PS\mathbf{e}_3 = \mathbf{R}.$$

En substituant l'expression de $\mathbf{R} = \pi\rho gHR^2\mathbf{e}_3$, il vient :

$$P = \rho gH.$$

Par conséquent, le torseur des efforts exercés sur la base Γ_0 est équivalent à une distribution uniforme $\mathbf{F}_s = P\mathbf{e}_3$ avec $P = \rho gH$.

2. **Pour construire une solution analytique du problème, nous considérons à partir de maintenant le problème d'équilibre obtenu en remplaçant la condition d'encastrement sur Γ_0 par une condition aux limites en efforts.**

La base Γ_0 est désormais supposée soumise à une densité surfacique d'efforts uniforme :

$$\mathbf{F}_s = P\mathbf{e}_3,$$

déterminée dans la question précédente. - Écrire les équations du problème et les nouvelles conditions aux limites associées. - Vérifier si ce problème est régulier. Si oui, préciser de quel type. - Définir les espaces des champs admissibles cinématiquement, U_{ad} , et statiquement, Σ_{ad} , pour ce problème.

1.2 Équations du problème d'élastostatique avec chargement (poids propre + force surfacique sur Γ_0)

Équilibre local

Dans le domaine Ω , l'équation d'équilibre local est donnée par :

$$\rho\mathbf{F}_v + \operatorname{div} \sigma = \mathbf{0},$$

où la force volumique $\mathbf{F}_v$ représente l'effet de la gravité $\mathbf{g}$, donnée par $\mathbf{F}_v = -g\mathbf{e}_3$. Ainsi, l'équation s'écrit :

$$-\rho g\mathbf{e}_3 + \operatorname{div} \sigma = \mathbf{0}.$$

Loi de comportement

La loi de comportement élastique linéaire est donnée par la relation entre le tenseur des contraintes σ et le tenseur des déformations ε :

$$\sigma = \lambda(\operatorname{tr} \varepsilon)\mathbf{1} + 2\mu\varepsilon,$$

où :

- λ et μ sont les coefficients de Lamé, définis par :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

avec E le module de Young et ν le coefficient de Poisson.

Le tenseur des déformations ε est exprimé en fonction du déplacement $\mathbf{u}$ comme :

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top).$$

Conditions aux limites

Les conditions aux limites en efforts sont définies comme suit :

- **Sur la base Γ_0 (pour $x_3 = 0$)**

La base inférieure est soumise à une force surfacique uniforme $\mathbf{F}_s = P\mathbf{e}_3$. Rappelons que, en mécanique des milieux continus, le vecteur force surfacique (ou vecteur contrainte de Cauchy) est défini par :

$$\mathbf{T}|_{\Gamma_0} = \sigma|_{\Gamma_0} \cdot \mathbf{n},$$

où $\mathbf{n}$ désigne la normale unitaire sortante à la surface. Sur la base Γ_0 , nous avons $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_3$, ce qui implique :

$$\mathbf{T}|_{\Gamma_0} = \sigma|_{\Gamma_0} \cdot (-\mathbf{e}_3) = P\mathbf{e}_3.$$

En contractant cette expression avec $\mathbf{e}_3$, on obtient finalement :

$$\mathbf{T}|_{\Gamma_0} \cdot \mathbf{e}_3 = -P.$$

- **Sur la base supérieure Γ_1 (pour $x_3 = H$)**

La base supérieure est libre d'efforts. La condition aux limites s'écrit donc :

$$\sigma|_{\Gamma_1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \text{avec } \mathbf{n} = \mathbf{e}_3.$$

- **Sur la surface latérale Γ_l (pour $r = R$)**

La surface latérale est également libre d'efforts. La condition s'écrit :

$$\sigma|_{\Gamma_l} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \text{avec } \mathbf{n} = \mathbf{e}_r.$$

1.2.1 Régularité du problème et espaces admissibles

Régularité du problème

Dans ce problème, nous cherchons le couple solution $(\sigma, \mathbf{u})$ satisfaisant aux équations d'équilibre, à la loi de comportement et aux conditions aux limites. Ce problème est-il bien posé et régulier ?

Oui, le problème est régulier.

Il s'agit d'un problème de type 2, car les conditions aux limites sont entièrement spécifiées en termes d'efforts (vecteur contrainte) sur l'ensemble de la frontière $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_l$.

Espaces admissibles

a. Espace cinématiquement admissible

L'espace des champs de déplacements admissibles est défini par :

$$U_{ad} = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \text{ est un champ régulier}\}.$$

Dans ce problème de type 2, aucune condition aux limites en déplacement n'est imposée, ce qui explique que l'espace U_{ad} ne comporte pas de condition supplémentaire.

b. Espace statiquement admissible

L'espace des champs de contraintes admissibles est défini par :

$$\Sigma_{ad} = \left\{ \tau \left| \begin{array}{l} \tau \text{ est régulier et symétrique,} \\ \operatorname{div} \tau - \rho g \mathbf{e}_3 = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{T}|_{\Gamma_0} = P \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{T}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{T}|_{\Gamma_l} = \mathbf{0} \end{array} \right. \right\}.$$

Régularité du problème

Dans ce problème, nous cherchons le couple solution $(\sigma, \mathbf{u})$ tel que ce problème soit bien posé.

Le problème est-il régulier ? **Oui.**

Il est de **type 2**, car on connaît en tout point de la frontière les données scalaires du vecteur contrainte.

Définition des espaces admissibles**

a. Espaces cinématiquement admissible

L'espace des champs admissibles cinématiquement est défini par :

$$U_{ad} = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \text{ régulier}\}.$$

Dans ce problème, il n'y a pas de condition limite en déplacement spécifique (propre à un problème de type 2).

b. Espaces statiquement admissible

L'espace des champs admissibles statiquement est défini par :

$$\Sigma_{ad} = \left\{ \tau \left| \begin{array}{l} \tau \text{ régulier et symétrique,} \\ \operatorname{div} \tau - \rho g \mathbf{e}_3 = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{T}|_{\Gamma_0} = P \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{T}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{T}|_{\Gamma_l} = \mathbf{0} \end{array} \right. \right\}.$$

3. On se propose de rechercher la solution en contrainte de ce nouveau problème sous la forme :

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{33}(x_1, x_2, x_3) e_3 \otimes e_3.$$

- À quelle(s) condition(s) un tel champ est-il statiquement admissible pour ce problème ?

1.3 Recherche de la solution en contrainte

Nous recherchons une solution en contrainte sous la forme diagonale suivante :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix}.$$

Méthodologie de l'approche en contrainte

Cette approche consiste en trois étapes principales :

1. **Choix d'un champ de contraintes admissible :**

On choisit $\sigma \in \Sigma_{ad}$ vérifiant les équations d'équilibre et les conditions aux limites en efforts.

2. **Calcul du tenseur des déformations ε :**

Le tenseur ε est déduit de la loi de comportement élastique linéaire établissant la relation entre σ et ε .

3. **Calcul du champ de déplacement $\mathbf{u}$:**

Le champ $\mathbf{u}$ est obtenu par intégration des déformations, en vérifiant simultanément les équations de compatibilité géométrique.

Remarque : Si les conditions aux limites en déplacements ne sont pas satisfaites, il peut être nécessaire de modifier le champ $\mathbf{u}$ ou d'imposer des conditions supplémentaires sur l'espace Σ_{ad} .

1.4 Résolution du problème d'élastostatique : Calcul de σ_{33}

1.4.1 Équation d'équilibre local

En adoptant l'expression simplifiée du tenseur des contraintes proposée, nous avons :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

La condition d'équilibre local $\text{div } \sigma = \rho g \mathbf{e}_3$ s'écrit alors :

$$\operatorname{div} \sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \rho g \mathbf{e}_3.$$

Ce qui donne l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = \rho g.$$

En intégrant cette équation, nous obtenons :

$$\sigma_{33} = \rho g x_3 + f(x_1, x_2),$$

où $f(x_1, x_2)$ est une fonction de x_1 et x_2 à déterminer à partir des conditions aux limites.

1.4.2 Application des conditions aux limites

Sur la base supérieure Γ_1 (pour $x_3 = H$), la surface est libre d'efforts. La condition aux limites s'écrit donc :

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \text{avec } \mathbf{n} = \mathbf{e}_3.$$

$$\sigma_{33}(x_3 = H) = 0.$$

En remplaçant $x_3 = H$ dans l'expression de σ_{33} , il vient :

$$\rho g H + f(x_1, x_2) = 0 \quad \implies \quad f(x_1, x_2) = -\rho g H.$$

1.4.3 Expression finale de σ_{33}

En regroupant les résultats obtenus, σ_{33} s'écrit finalement :

$$\sigma_{33} = \rho g(x_3 - H),$$

où $x_3 \in [0, H]$.

1.5 Vérification des conditions aux limites

1.5.1 Condition sur Γ_1 (pour $x_3 = H$)

$$\sigma_{33}(x_3 = H) = \rho g(H - H) = 0.$$

1.5.2 Condition sur Γ_0 (pour $x_3 = 0$)

$$\sigma_{33}(x_3 = 0) = \rho g(0 - H) = -\rho g H.$$

1.5.3 Condition sur Γ_l (surface latérale)

Sur Γ_l , la normale est $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$.

$$\sigma \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{0}.$$

1.5.4 Conclusion de l'étude du déplacement

Déplacement du centre O' de la surface Γ_1 : En prenant $r = 0$, nous obtenons :

$$\mathbf{OM}' = H\mathbf{e}_3 - \frac{\rho g}{2E} H^2 \mathbf{e}_3.$$

Le centre O' subit donc un déplacement vertical donné par :

$$u_z(O') = -\frac{\rho g}{2E} H^2.$$

Déplacement d'un point quelconque de Γ_1 : La déformée de la surface Γ_1 est décrite par :

$$u_z(r) = \frac{\nu \rho g}{E} \frac{r^2}{2} - \frac{\rho g}{2E} H^2.$$

Cette déformation se caractérise par une courbure parabolique selon la direction verticale ($\mathbf{e}_3$). Elle prend la forme d'un paraboloïde de révolution dont l'axe coïncide avec l'axe $\mathbf{e}_3$ du cylindre. Le sommet de ce paraboloïde est légèrement abaissé sous l'effet du poids propre, comme l'indique le terme $-\frac{\rho g H^2}{2E}$. La courbure de la surface dépend des paramètres mécaniques du matériau, notamment du coefficient de Poisson ν , de la masse volumique ρ et du module de Young E .

4. **Déterminer le champ de déformations associé à ce champ de contraintes.**

- Existe-t-il un champ de déplacement qui en dérive ?

1.6 Calcul de ε et vérification de la compatibilité

1.6.1 Expression du tenseur des déformations

La loi de comportement élastique linéaire permet d'exprimer le tenseur des déformations ε en fonction du tenseur des contraintes σ . Sous forme inversée, cette relation s'écrit :

$$\varepsilon = \frac{1 + \nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\sigma) \mathbf{1},$$

où $\mathbf{1}$ désigne le tenseur identité, ν le coefficient de Poisson, et E le module de Young.

En substituant l'expression du tenseur des contraintes σ :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix},$$

nous avons $\text{tr}(\sigma) = \sigma_{33}$. En reportant dans la loi de comportement, le tenseur ε devient :

$$\varepsilon = \frac{1 + \nu}{E} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} - \frac{\nu}{E} \begin{bmatrix} \sigma_{33} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

Après simplification, nous obtenons :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -\frac{\nu\sigma_{33}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu\sigma_{33}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{33}}{E} \end{bmatrix}.$$

1.6.2 Expression finale du tenseur des déformations

En remplaçant $\sigma_{33} = \rho g(x_3 - H)$ dans l'expression du tenseur des déformations, nous obtenons :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -\frac{\nu}{E}\rho g(x_3 - H) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E}\rho g(x_3 - H) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{E}\rho g(x_3 - H) \end{bmatrix}.$$

1.6.3 Vérification des équations de compatibilité géométrique

Le champ de déformations ε obtenu est diagonal, avec uniquement les composantes diagonales $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33})$ non nulles. Vérifions que ces déformations satisfont les équations de compatibilité géométrique.

1. Pour la composante ε_{33} :

L'équation de compatibilité correspondante s'écrit :

$$\{33,11\} + \{11,33\} = 2, \quad \{13,13\} = 0.$$

Puisque $\varepsilon_{13} = 0$, le terme de droite est nul. Par ailleurs, ε_{33} ne dépend que de x_3 , donc $\varepsilon_{33,11} = 0$. Enfin, ε_{11} dépend linéairement de x_3 , d'où $\varepsilon_{11,33} = 0$. L'équation est bien satisfaite.

2. Pour les composantes ε_{11} et ε_{22} :

Ces composantes dépendent linéairement de x_3 , donc leurs dérivées secondes par rapport à x_3 sont nulles :

$$\{11,33\} = 0 \text{ et } \{22,33\} = 0.$$

Les équations de compatibilité correspondantes sont donc satisfaites.

3. Pour les autres composantes :

Puisque ε ne dépend que de la variable x_3 , toutes les dérivées secondes mixtes ou d'ordre supérieur en x_1 et x_2 sont nulles. Ces composantes ne présentent aucune incompatibilité.

1.6.4 Conclusion

L'ensemble des équations de compatibilité géométrique est satisfait par le champ de déformations ε proposé. Ce résultat démontre que ce champ de déformations est **géométriquement cohérent**, c'est-à-dire qu'il peut être associée à un champ de déplacement $\mathbf{u}$ continu et régulier dans tout le domaine Ω .

En d'autres termes, la solution obtenue pour ε respecte les lois de la géométrie de la mécanique des milieux continus. Il n'y a aucune incohérence ni distorsion impossible dans le matériau, et le champ $\mathbf{u}$ est physiquement **réalisable**.

5. Calculer le champ de déplacement associé s'il existe.

- Le problème résolu admet-il un couple (σ, u) solution unique ? Commenter par rapport au problème initial.

1.7 Calcul du champ de déplacement par intégration des déformations

Le tenseur des déformations ε est diagonal. Il s'écrit :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix},$$

avec :

- $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\frac{\nu}{E} \rho g (x_3 - H),$
- $\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} \rho g (x_3 - H).$

1.7.1 Relations déformations-déplacements

Les relations entre le tenseur des déformations ε et le champ de déplacement $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ sont données par les formules de Green-Lagrange :

1. $\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1},$
2. $\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2},$
3. $\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3},$

4. $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0,$
5. $\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0,$
6. $\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = 0.$

Les composantes hors diagonale du tenseur des déformations étant nulles ($\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$), nous en déduisons les conditions suivantes :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0.$$

1.7.2 Intégration des équations de Green-Lagrange

Procédons à l'intégration de chaque équation :

a) **Pour ε_{11} :**

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\frac{\nu}{E} \rho g(x_3 - H).$$

En intégrant par rapport à x_1 , nous obtenons :

$$u_1 = -\frac{\nu}{E} \rho g(x_3 - H)x_1 + f_1(x_2, x_3).$$

b) **Pour ε_{22} :**

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{\nu}{E} \rho g(x_3 - H).$$

En intégrant par rapport à x_2 , nous obtenons :

$$u_2 = -\frac{\nu}{E} \rho g(x_3 - H)x_2 + f_2(x_1, x_3).$$

c) **Pour ε_{33} :**

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{1}{E} \rho g(x_3 - H).$$

En intégrant par rapport à x_3 , nous obtenons :

$$u_3 = \frac{1}{E} \rho g \frac{(x_3 - H)^2}{2} + f_3(x_1, x_2).$$

1.7.3 Forme générale du champ de déplacement

En regroupant les résultats précédents, le champ de déplacement s'écrit de manière générale :

$$u_1 = -\frac{\nu}{E}\rho g(x_3 - H)x_1 + f_1(x_2, x_3),$$

$$u_2 = -\frac{\nu}{E}\rho g(x_3 - H)x_2 + f_2(x_1, x_3),$$

$$u_3 = \frac{1}{E}\rho g \frac{(x_3 - H)^2}{2} + f_3(x_1, x_2).$$

où f_1 , f_2 et f_3 sont des fonctions arbitraires à déterminer en imposant les conditions de compatibilité géométrique.

1.7.4 Exploitation des conditions de compatibilité

Injectons les expressions de u_1 , u_2 et u_3 dans les équations de compatibilité (4), (5) et (6). Nous obtenons les conditions suivantes sur les fonctions f_1 , f_2 et f_3 :

Condition (4) (pour $\varepsilon_{12} = 0$) :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_2, x_3) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_3) = 0.$$

Condition (5) (pour $\varepsilon_{13} = 0$) :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x_2, x_3) - \frac{\nu\rho g}{E}x_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0.$$

Condition (6) (pour $\varepsilon_{23} = 0$) :

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x_1, x_3) - \frac{\nu\rho g}{E}x_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0.$$

1.7.5 Calcul du champ de déplacement

- Le champ de déplacement $\mathbf{u}$ a été calculé et décomposé en trois parties :
 - Déformation mécanique,
 - Rotation de corps rigide, et
 - Translation de corps rigide.

$$\mathbf{u} = \begin{cases} u_1 = -\frac{\nu\rho g}{E}(x_3 - H)x_1 + ax_2 + bx_3 + d, \\ u_2 = -\frac{\nu\rho g}{E}(x_3 - H)x_2 - ax_1 + fx_3 + h, \\ u_3 = \frac{\rho g}{E}\left(\frac{x_3^2}{2} - Hx_3\right) + \frac{\nu\rho g}{E}\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + bx_1 - fx_2 + n. \end{cases}$$

- Ce champ satisfait à la fois les **équations de compatibilité** et les **conditions aux limites** imposées, prouvant qu'il est admissible et géométriquement cohérent.

1.7.6 Unicité de la solution

L'analyse du problème révèle que le couple solution $(\sigma, \mathbf{u})$ n'est pas unique. Examinons les raisons de cette non-unicité.

Dans le problème initial (avec encastrement sur Γ_0) : - La condition d'encastrement sur Γ_0 imposait l'annulation du déplacement :

\$\$

$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_0,$

\$\$

ce qui éliminait toute contribution de rotation ou de translation de corps rigide.

- Par conséquent, pour le problème initial avec encastrement, la solution $(\sigma, \mathbf{u})$ est **unique**.

Dans le problème modifié (avec chargement en efforts sur Γ_0) : - Le remplacement de la condition d'encastrement par un chargement en efforts uniformes assouplit considérablement les contraintes sur les déplacements. - Cette modification introduit des **degrés de liberté supplémentaires** correspondant aux mouvements de corps rigide (rotation et translation). - Ces mouvements rigides ne sont pas contraints par les équations d'équilibre ni par les conditions aux limites en efforts. - En conséquence, la solution $(\sigma, \mathbf{u})$ est **non unique**.

Cette non-unicité se manifeste par la présence des six constantes indéterminées a, b, f, d, h et l , qui représentent les mouvements rigides possibles du système.

1.7.7 Résolution des équations de compatibilité

En dérivant les conditions précédentes, nous obtenons les équations différentielles suivantes :

Dérivée de la condition (4) :

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2}(x_2, x_3) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2}(x_1, x_3) = 0.$$

Dérivée de la condition (5) :

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3^2}(x_2, x_3) = 0 \quad \text{et} \quad -\frac{\nu \rho g}{E} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = 0.$$

Dérivée de la condition (6) :

$$-\frac{\nu \rho g}{E} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3^2}(x_1, x_3) = 0.$$

1.7.8 Forme générale des fonctions d'intégration

En intégrant les équations différentielles précédentes, nous obtenons les expressions générales des fonctions f_1 , f_2 et f_3 :

Pour $f_1(x_2, x_3)$:

$$f_1(x_2, x_3) = ax_2 + bx_3 + cx_2x_3 + d,$$

Pour $f_2(x_1, x_3)$:

$$f_2(x_1, x_3) = ex_1 + fx_3 + gx_1x_3 + h,$$

Pour $f_3(x_1, x_2)$:

$$f_3(x_1, x_2) = \frac{\nu \rho g}{E} \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + ix_1 + jx_2 + kx_1x_2 + l.$$

1.7.9 Détermination des constantes d'intégration

En reportant les expressions de f_1 , f_2 et f_3 dans les conditions de compatibilité (4), (5) et (6), nous déterminons les relations entre les constantes d'intégration :

Dans la condition (4) :

$$a + e + (c + g)x_3 = 0,$$

ce qui impose :

$$a + e = 0 \quad \text{et} \quad c + g = 0.$$

Dans la condition (5) :

$$b + i = 0 \quad \text{et} \quad c + k = 0.$$

Dans la condition (6) :

$$f + j = 0 \quad \text{et} \quad g + k = 0.$$

Ces relations permettent d'exprimer toutes les constantes en fonction de six paramètres indépendants.

1.7.10 Expression finale du champ de déplacement

En assemblant l'ensemble des résultats, le champ de déplacement $\mathbf{u}$ s'écrit :

$$\mathbf{u} = \begin{cases} u_1 = -\frac{\nu\rho g}{E}(x_3 - H)x_1 + ax_2 + bx_3 + d, \\ u_2 = -\frac{\nu\rho g}{E}(x_3 - H)x_2 - ax_1 + fx_3 + h, \\ u_3 = \frac{\rho g}{E}\left(\frac{x_3^2}{2} - Hx_3\right) + \frac{\nu\rho g}{E}\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + bx_1 - fx_2 + l. \end{cases}$$

Ce champ peut être décomposé en trois contributions distinctes : - **une partie liée à la déformation mécanique** (effet des contraintes internes), - **une partie associée à une rotation de corps rigide** (paramètres a et b), - **une partie correspondant à une translation de corps rigide** (paramètres d , h et l).

Ce champ satisfait simultanément les équations de compatibilité géométrique et les conditions aux limites en efforts, ce qui démontre son caractère admissible.

-
6. **Déterminer le déplacement du point O' , centre de la face Γ_1 , ainsi que la déformée de cette surface.**

1.8 Déplacement de la face supérieure Γ_1

Considérons un point M_0 appartenant à la surface Γ_1 , caractérisé par les coordonnées $(r, \theta, x_3 = H)$ en coordonnées cylindriques. Sa position initiale est donnée par :

$$\mathbf{OM}_0 = r\mathbf{e}_r + H\mathbf{e}_3.$$

Après déformation, sa position devient :

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OM}_0 + \mathbf{u}(M_0),$$

où $\mathbf{u}(M_0)$ désigne le déplacement du point M_0 évaluée sur Γ_1 (c'est-à-dire pour $x_3 = H$).

1.8.1 Calcul du déplacement sur Γ_1

À partir du champ de déplacement $\mathbf{u}$ déterminé précédemment, évaluons chaque composante sur la surface Γ_1 (pour $x_3 = H$) :

1. **Composante radiale u_r** : En coordonnées cylindriques, la composante radiale s'annule pour $x_3 = H$, car seul le terme de déformation mécanique contribue :

$$u_r = 0.$$

2. **Composante orthoradiale u_θ** : En raison de la symétrie axisymétrique du problème, il n'y a pas de dépendance angulaire. Par conséquent :

$$u_\theta = 0.$$

3. **Composante verticale u_z** : La composante verticale est obtenue en évaluant u_3 en $x_3 = H$:

$$u_z = \frac{\nu \rho g}{E} \frac{r^2}{2} - \frac{\rho g}{2E} H^2.$$

1.8.2 Position du point après déformation

En combinant la position initiale et le déplacement, la position du point M_0 après déformation devient :

$$\mathbf{OM} = (r\mathbf{e}_r + H\mathbf{e}_3) + \left(\frac{\nu \rho g}{E} \frac{r^2}{2} - \frac{\rho g}{2E} H^2 \right) \mathbf{e}_3.$$

Soit, de manière explicite :

$$\mathbf{OM} = r\mathbf{e}_r + \left(H + \frac{\nu \rho g}{E} \frac{r^2}{2} - \frac{\rho g}{2E} H^2 \right) \mathbf{e}_3.$$

1.8.3 Analyse de la déformée de la surface Γ_1

L'examen de la déformée de la surface Γ_1 révèle les caractéristiques suivantes :

1. La coordonnée radiale ($r\mathbf{e}_r$) demeure inchangée, ce qui confirme l'absence de déformation radiale.
2. La coordonnée verticale ($\mathbf{e}_3$) subit un déplacement présentant deux contributions distinctes :
 - un terme quadratique en r^2 , issu de la déformation mécanique liée au coefficient de Poisson ;
 - un terme constant en H^2 , traduisant l'effet global du poids propre du cylindre.

La surface supérieure conserve sa symétrie de révolution autour de l'axe x_3 , mais présente une courbure parabolique résultant de la dépendance quadratique en r .

1.8.4 Conclusion

1. **Déplacement du centre O' de Γ_1** : En posant $r = 0$, on retrouve :

$$\mathbf{OM}' = H\mathbf{e}_3 - \frac{\rho g}{2E}H^2\mathbf{e}_3.$$

Le point O' subit donc un déplacement vertical de :

$$u_z(O') = -\frac{\rho g}{2E}H^2.$$

2. **Déplacement général sur Γ_1** : La déformée de la surface Γ_1 est donnée par :

$$u_z(r) = \frac{\nu \rho g}{E} \frac{r^2}{2} - \frac{\rho g}{2E}H^2.$$

La déformation est caractérisée par une courbure parabolique dans la direction verticale ($\mathbf{e}_3$). Elle prend la forme d'un paraboloïde de révolution orienté selon l'axe $\mathbf{e}_3$. Le sommet de ce paraboloïde est légèrement abaissé en raison du poids propre, ce qui est exprimé par le terme $-\frac{\rho g H^2}{2E}$. La courbure de la surface dépend des paramètres mécaniques du matériau, notamment le coefficient de Poisson (ν), la masse volumique (ρ) et le module de Young (E).

-
7. **Calculer numériquement le déplacement $u_z(O')$, au centre de Γ_1 , pour ces dimensions et propriétés mécaniques. Comparer ce résultat à celui obtenu à l'aide d'une simulation par éléments finis 3D. Interpréter les écarts éventuels.**

1.9 Applications numériques

- Rayon $R = 0.1$ m
- Hauteur $H = 0.5$ m
- Module de Young $E = 210$ GPa
- Coefficient de Poisson $\nu = 0.3$
- Masse volumique $\rho = 7850$ kg/m³

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from cylindre_params import CylindreParams

# --- Paramètres physiques ---
R = CylindreParams.R
H = CylindreParams.H
E = CylindreParams.E
g = CylindreParams.g
nu = CylindreParams.nu
rho = CylindreParams.rho

# --- Maillage ---
theta = np.linspace(0, 2*np.pi, 100)
r = np.linspace(0, R, 50)
R_grid, Theta_grid = np.meshgrid(r, theta)

# --- Déplacement u_z(r) ---
u_z = (nu * rho * g / E) * (R_grid**2) / 2 - (rho * g / (2 * E)) * H**2

# --- Coordonnées cartésiennes ---
X = R_grid * np.cos(Theta_grid)
Y = R_grid * np.sin(Theta_grid)
Z = u_z

# --- Style graphique ---
style = get_plot_style()

# Couleur personnalisée (RGBA)
custom_bg = (0.157, 0.169, 0.188, 1.0) # très foncé avec une touche de bleu

# --- Tracé 3D ---
fig = plt.figure(figsize=(10, 8), facecolor=custom_bg)
ax = fig.add_subplot(111, projection="3d", facecolor=custom_bg)
surf = ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap=style["cmap"], edgecolor=style["edge"], linewidth=0.5)

ax.set_xlabel("X (m)", color=style["text"])
ax.set_ylabel("Y (m)", color=style["text"])
ax.set_zlabel(r"$u_z$ (m)", color=style["text"], labelpad=5)
ax.set_title("Déplacement $u_z$ en fonction du rayon $r$", color=style["text"])

```

```

ax.set_box_aspect([1, 1, 0.4])
ax.set_zlim(np.min(Z) * 1., np.max(Z) * 1)

ax.xaxis.set_panel_color(custom_bg)
ax.yaxis.set_panel_color(custom_bg)
ax.zaxis.set_panel_color(custom_bg)

cbar = fig.colorbar(surf, shrink=0.5, aspect=10, pad=0.1)
cbar.set_label("Déplacement  $u_z$  (m)", color=style["text"], labelpad=15)
cbar.ax.yaxis.label.set_color(style["text"])
cbar.ax.tick_params(color=style["text"])
plt.setp(plt.getp(cbar.ax.axes, "yticklabels"), color=style["text"])

plt.show()

```

